**ממ"ן 15 אלגוריתמים**

**שאלה 1**

נסתכל על האיור הבא שמתאר רשת זרימה עם צלע וריצה של Edmonds-Karp עליה (בכל שלב מוצג הגרף השיורי כאשר המסלול הקצר שנמצא מסומן באדום).

A picture containing text, map

Description automatically generated

נשים לב שבגרף המקורי (שלב א') המרחק של a מ-s הוא 1 ושל b מ-s הוא 2 לכן תנאי ב' מתקיים, בנוסף הקשת נמצאת במסלול הקצר שמצא האלגוריתם בשלבים ב' ו- ו' ובשניהם מוסיף האלגוריתם זרימה הזהה לקיבולת השיורית (2) ולכן מתקיים תנאי א'.

**שאלה 2**

א. תהי f זרימה חוקית כלשהיא בגרף, נסמן ב קשתות של מסלול פשוט כלשהוא מs ל-t שבו יש זרימה, לפי נתוני השאלה – מכיוון שf היא זרימה חוקית , אזי לכל מתקיים: .

יהי , נגדיר זרימה חדשה כך שלכל תוגדר , נשים לב שחוק הקיבולת נשמר הרי .

תהיינה צמתים עבורן , נסתכל על הצומת u ונראה שהזרימה החדשה תגדיל בגם את כמות הזרימה הנכנסת אליה (בקשת ) וגם את כמות הזרימה היוצאת ממנה (בקשת ) ולכן נשמר חוק שימור הזרימה (בגלל שמדובר במסלול פשוט מs ל-t אז בהכרח לכל קודקוד ששונה מs ומt אם הוא במסלול תהיה קשת אחת שיוצאת ממנו וקשת אחת שנכנסת אליו שזרימתן גדלה ואם הוא לא במסלול אז הזרימה בקשתות שלו לא השתנו).

הראינו שאפשר להגדיל את הזרימה הנתונה בכל מספר חיובי שנבחר ובכך להגיע לזרימה גדולה כרצוננו.

ב. תיאור האלגוריתם

ראשית נספק את תנאי הקיבול. נגדיר זרימה f שבה לכל קשת מתקיים שעבורה מתקיים כמובן תנאי הקיבול .

כעת כשקיבלנו זרימה שמקיימת את תנאי הקיבול יש לדאוג לכך שהיא תקיים גם את תנאי השימור.

האלגוריתם יעבור על כל הצמתים המקיימים כלומר , נכנס אליהם יותר זרם מאשר יוצא, ויזרים דרכם עוד זרם לכיוון t. כדי להזרים עוד זרם לכיוון t אנו נדרשים להחזיק לכל צומת את הקשת שמובילה ממנו אל t. לשם כך נריץ BFS מ-t ב- (גרף הזהה לG רק שכיווני הקשתות הפוכים) ונעבור על הצמתים (למעט s) מהצומת הרחוק ביותר מ-t ועד לצומת הקרוב ביותר ל-t.

לאחר מכן נעבור על כל הצמתים המקיימים כלומר , נכנס אליהם פחות זרם מאשר יוצא ונזרים אליהם עוד זרם מהצומת שמוביל אליהם במסלול s…v. לשם כך נריץ BFS מ-s ונעבור על הצמתים (למעט t (מהצומת הרחוק ביותר מ-s ועד לצומת הקרוב ביותר ל-s. בסיום 2 ריצות ה-BFS נקבל שכל הצמתים מקיימים כלומר מה שאומר שתנאי השימור מתקיים.

נשים לב במהלך המעבר על הצמתים אנו רק מגדילים את הזרימה בכל קשת ולכן אם בהתחלה קיימנו את תנאי הקיבול גם בסיום האלגוריתם נקיים אותו.

האלגוריתם:

1. לכל קשת בצע:

f(e) ← c(e) .1.1

f(u) ← f(u) + c(e) .1.2

f(v) ← f(v) – c(e) .1.3

2. נריץ BFS על מ-t ונתחזק לכל צומת את הקשת ממנה הגענו ל-v ב-(e(v ואת

המרחק מ-t ב-(d(v.

3. עבור על כל הצמתים (למעט t ( כך שמתקיים עבורם 0 > f(v) ,בסדר יורד עבור ערך

D(v) ובצע:

3.1 (הקשת ההפוכה ממנה הגענו מu לv ב)

.3.2

.3.3

.3.4

4. נריץ BFS על G מ-s ונתחזק לכל צומת את הקשת ממנה הגענו ל-v ב-(e(v ואת

המרחק מ-s ב-(d(v.

5. עבור על כל הצמתים (למעט s (כך שמתקיים עבורם 0 < f(v) ,בסדר יורד עבור ערך

d(v) ובצע:

5.1 (הקשת ממנה הגענו מu לv ב)

.5.2

.5.3

.5.4

6. החזר את f

הוכחת נכונות

כפי שהסברנו בתחילת התיאור – תנאי הקיבול מתקיים בתחילת האלגוריתם בכך שאנו מאתחלים את (f(e להיות (c(e לכל קשת e בגרף בשלב 1.

במהלך ריצת האלגוריתם בשלבים 3.2 ו 5.2 מבצעים כאשר בc>0 לפיכך מתקיים (f(e) ≥ c(e כנדרש לתנאי הקיבול.

נוכיח כעת כי הזרימה מקיימת את חוק השימור, בתחילת האלגוריתם אנו מאתחלים את (f(v לכל צומת v בגרף. לאחר מכן אנו עוברים על כל הצמתים שמקיימים 0 > f(v) ומרחקם מ-t יורד ע"פ סריקת ה- BFS שהרצנו בשלב 3.

כל צומת v שאנו עוברים עליו בשלב 3 הוא צומת שהזרימה ממנו קטנה מהזרימה אליו, לפיכך כדי לתקן את המצב אנו צריכים להזרים ממנו עוד זרם. כיוון שיש לנו את הקשת שיוצאת מ-v אל u בדרך ל-t אנו יכולים להוסיף לה את הזרם שחסר כך שיתקיים 0 = f(v).

אנו מבצעים הוספה של לקשת (v,u) וכך מאזנים את f(v) = f(v) + |f(v)| = 0(כי f(v)<0).

כדי לעדכן את המצב הקיים בזרימה אנו מעדכנים את הצומת הבא u כך שכעת מתקיים =f(u)-f(v)(f(u כיוון שהזרימה אל u גדלה ב |f(v)|.

בסיום האיטרציה , f(v) = 0 ו- f(u) = x כאשר x מספר שלם, אם 0=x אז המצב תקין אם 0<x אז נטפל בצומת u באיטרציה הבאה, כי מתקיים (d(u) < d(v ואנו עוברים בסדר יורד על ערכי (v(d לכל הצמתים. אם 0<x נטפל בצומת u בשלב 5. בסיום שלב 3 כל הצמתים (למעט (t,s מקיימים 0 ≥ f(v) כפי שהוסבר לעיל.

לאחר מכן אנו עוברים על כל הצמתים שמקיימים 0 > f(v) ומרחקם מ-s יורד ע"פ סריקת ה- BFS שהרצנו בשלב 4.

כל צומת v שאנו עוברים עליו בשלב 5 הוא צומת שהזרימה ממנו גדולה מהזרימה אליו, לפיכך כדי לתקן את המצב אנו צריכים להזרים אליו עוד זרם. כיוון שיש לנו את הקשת שיוצאת מ-u אל v אנו יכולים להוסיף לה את הזרם שחסר כך שיתקיים 0 = f(v).

אנו מבצעים הוספה של f(v) לקשת (u,v) וכך מאזנים את f(v) = f(v) - f(v) = 0. כדי לעדכן את המצב הקיים בזרימה אנו מעדכנים את הצומת הקודם u כך שכעת מתקיים, f(u) = f(u) + f(v) כיוון שהזרימה מu גדלה בf(v).

בסיום האיטרציה 0 = f(v) ,ו-x = f(u) כאשר x מספר שלם גדול שווה לאפס. (x לא יכול להיות קטן מאפס כיוון שאנו מגדילים אותו במספר חיובי, וכבר הובטח לנו בסיום שלב 3 שכל הצמתים מקיימים *.*)

אם 0=x אז המצב תקין.

אם 0<x אז נטפל בצומת u באיטרציה הבאה, כי מתקיים (d(u) > d(v ואנו עוברים בסדר יורד על ערכי (v(d לכל הצמתים.

בסיום שלב 5 כל הצמתים (למעט t,s) מקיימים 0 = f(v) כפי שהוסבר לעיל.

לסיכום: בסיום שלב 5 קיבלנו ש-f(v)=0 למעט t,s .כלומר מתקיים חוק השימור וקיבלנו זרימה חוקית כנדרש.

זמן ריצה:

האלגוריתם עובר על כל הקשתות בשלב 1 ומבצע עבודה קבועה – (|O(|E. בשלבים 3-2 ו-5-4 האלגוריתם מבצע BFS בזמן O(|v|+|E|) ובנוסף מבצע מעבר לכל היותר על כל הצמתים בגרף - בזמן (|O(|V. **לסיכום: זמן הריצה הוא O(|v|+|E|).**

ג. נפעיל את האלגוריתם למציאת זרימה חוקית מסעיף ב' על .

לאחר מכן נבנה את רשת הזרימה , הופכית ל- כך שערכי הקיבול של הם עודפי הזרימה מעבר לחסמים התחתונים ב-:

נריץ על כאשר קודקוד המקור של הזרם הוא וקודקוד היעד הוא (נדגיש שהפעם ערכי הקיבול הם חסמים מלמעלה ולא מלמטה על הזרימה).

נקבל זרימה חוקית ומקסימלית שניתן להחסיר מהזרימה החוקית על מבלי שהזרימה באף קשת תרד מתחת לחסם התחתון שלה.

כעת נבצע את חיסור הזרימה:

ובזאת קיבלנו זרימה חוקית מזערית.

נכונות וזמן ריצה:

מתקיים שימור זרימה בכל הקודקודים למעט :

* ראשית הוכחנו בסעיף ב' שהאלגוריתם מביא לזרימה חוקית בה מתקיים שימור זרימה.
* כעת אנו מחסרים תוצאת זרימה המקיימת שימור זרימה מהזרימה החוקית שנמצאה – מובן שכל הקודקודים (למעט ) עדיין מקיימים שימור זרימה.

אין קשת בה הזרימה קטנה מהחסם התחתון של הקיבול שלה:

* ראשית הוכחנו בסעיף ב' שהאלגוריתם מביא לזרימה חוקית בה אין קשת עם זרימה קטנה מהקיבול שלה.
* כעת אנו מגבילים בריצת Edmonds-Karp על G’ את הקיבול של כל קשת להפרש בין הזרימה שהתקבלה בזרימה החוקית לבין הקיבול שחוסם אותה מלמטה – לכן כשאנו מחסרים את הזרימה שהתקבלה ב- מהזרימה ב- אנו חייבים לקבל ערך גדול או שווה לקיבול.

הזרימה היא מינימאלית:

* נניח בשלילה שהזרימה לא מינימאלית – אז יש מסלול בו עוברת זרימה "מיותרת" מ- ל-, ובפרט בכל הקשתות במסלול הזה הזרם הינו מעבר לקיבול החוסם את הזרימה מלרע.
* אבל אז נובע שבגרף השיורי של היה מסלול שיפור אך האלגוריתם Edmonds-Karp לא מצא אותו – וזו סתירה לכך שכל התשובות של האלגוריתם הן נכונות.
* לכן נסיק כי הזרימה אכן מינימאלית.

בזאת הוכחנו נכונות.

זמן הריצה של הפעלת האלגוריתם למציאת זרימה חוקית, לבניית ולעדכון הזרימות הוא ,

הגודל של הוא במקרה הגרוע כגודל של לכן זמן הריצה הדומיננטי הוא זמן הריצה של Edmonds-Karp על , . כלומר זמן הריצה הכולל הוא .

**שאלה 3**

א.

הזרימה המרבית יכולה לגדול לכל היותר ב-1 בעקבות השינוי ב-, וזאת אם יש מסלול זרימה נוסף במשקל 1 שעובר דרך , אחרת היינו מקבלים סתירה לכך שהזרימה הייתה מרבית.

נריץ איטרציה אחת של Edmonds-Karp על הגרף המעודכן – אם אכן יש מסלולי זרימה דרך האיטרציה תמצא אחד מהם והזרימה תשתפר ב-1, ואחרת הזרימה המירבית נותרת כפי שהייתה.

עלות איטרציה אחת של Edmonds-Karp כעלות , , כלומר , עלות לינארית.

ב.

אם צריך לתקן את רשת הזרימה.

נסמן . עלינו למצוא מסלול זרימה שעובר דרך ולהוריד בכל הקשתות שבו את הזרימה ב-1.

נריץ בכיוון ההפוך של הקשתות מ- כאשר נתקדם רק בקשתות שיש בהן זרימה, קיים מסלול ל- שכן והרי שהזרימה מקורה ב-.להוריד בכל הקשתות בו את הזרימה ב-1.

נריץ מ- כאשר נתקדם רק בקשתות שיש בהן זרימה, קיים מסלול ל- שכן והרי שהזרימה מקורה ב-.

כעת נוריד את הזרימה ב-1 לאורך המסלול שמצאנו בסריקות.

כעת עדיין יכול להיות שיש מסלול שדרכו ניתן לשפר את הזרימה ב-1 (מאחר והקטנו את הזרימה דרך חלק מהקשתות ב-1), נריץ איטרציה אחת של Edmonds-Karp על הגרף.

זמן הריצה כמו בסעיף א' ועוד זמן ריצה של שני , בסה"כ עדיין , כלומר , עלות לינארית.

**שאלה 4**

מהנתון שכל אחד מהמשתנים מופיע בדיוק בשלוש פסוקיות שונות מבין ושכל פסוקית מכילה בדיוק שלושה משתנים שונים נובע .

אם נמצא שידוך מונוגמי בין קבוצת המשתנים לבין קבוצת הפסוקיות כך שכל פסוקית משודכת למשתנה שמוכל בה, וכל משתנה משודך לכל היותר לפסוקית אחת, נוכל לקבוע את ערך האמת של המשתנה המוכל בכל פסוקית כך שערך האמת של הפסוקית יהיה True (אם מופיע נקבע , ואחרת ) ובמצב כזה נוכל למצוא הצבה שתאמת את הביטוי כולו בפרט נוכיח שהוא ספיק.

נגדיר גרף דו צדדי כאשר .

תהי קבוצת פסוקיות.

נראה כי .

ידוע כי מכל יוצאות שלוש קשתות ב-, כלומר בסה"כ מ- יוצאות קשתות.

נניח בשלילה כי , אבל ידוע כי כל משתנה מופיע בדיוק בשלוש פסוקיות, ולכן מספר הקשתות שנוגע ב- הוא קטן מ- וזו סתירה כי הקבוצה מוגדרת בדיוק על ידי קבוצת הקודקודים מ- שנוגעות בה קשתות.

כלומר לפי משפט קיים שידוך מושלם ולכן מן ההקדמה, קיימת הצבה שמספקת את הפסוק .

כדי למצוא את ההצבה הזו נבנה את הגרך בזמן , נריץ את האלגוריתם למציאת זיווג מושלם על ע"י רשת זרימה בזמן ואז בהתאם לשידוך נעבור על רשימת המשתנים ונקבע להם ערך אמת בזמן .

בסה"כ זמן הריצה הוא .